

実験データに基づいた部分空間法による補償器の低次元化*

岡田 昌史** · 杉江 俊治**

Subspace Controller Reduction based on Experimental Data*

Masafumi OKADA** and Toshiharu SUGIE**

This paper proposes a controller reduction method based on experimental data. In this method, using an appropriate subspace projection on the state-space sequence of the original controller, we obtain the reduced-order one. This method is applicable to unstable controllers and provides some indices by which we can determine the reduced order. Furthermore, we evaluate its effectiveness by experiment on an inverted pendulum system.

1. はじめに

制御系の設計において次数の小さな補償器を設計することは、信頼性やコストの面で重要な問題である。しかし、近年のロバスト制御の発達に伴い、補償器の次数は増加の傾向にあり、そのため補償器の低次元化問題が重要となっている。

従来の低次元化法は、開ループでその入出力関係がほぼ等しいような低次元化システムをもとめる、内部平衡実現によるBT法(平衡化打ち切り法)¹⁾や、ハンケルノルム近似法²⁾などがある。しかし、補償器は閉ループ系の内部に組み込まれることが前提であることから、閉ループ特性を考慮した近似が必要となり、周波数重みを用いた低次元化法が提案されている^{3),4)}。しかし、この周波数重みには制御対象の情報を用いるため、モデル化誤差が存在する場合には望ましい結果が得られないことが考えられる。また、これらの方法は安定なシステムにしか適用できないため、不安定な補償器に対しては既約分解後に低次元化を施す方法も提案されている^{5),6)}。しかし、この場合には既約分解の際の極をどう選ぶか、周波数重みをどう定めるかといった問題点が残る。

そこで本論文では、これまでとは全く異なった観点に

立ち、部分空間同定法^{7),8)}の立場から実験データを利用した補償器の低次元化法を提案する。部分空間同定法ではシステムの次数を定める際に、ある行列の特異値の大きさを基準に判断するため、モデル低次元化能力の可能性を持つことが知られている⁹⁾。提案手法ではシステム同定とは異なり、補償器の状態変数が利用可能であることを陽に用い、この時系列データを集め、この中で出力に対する影響が十分小さい状態を無視することにより低次元化を行う。さらに、本設計法の有効性を従来法との比較を含めた実験により検証する。

2. 低次元化問題

本論文では、Fig.1のような閉ループ系を考える。ここで、 P は制御対象、 K は補償器を表しており、 r_1, r_2 はある決まった外部入力である。また、 K はつぎの入力 m 出力、 n 次元の線形時不変な離散時間状態空間表現

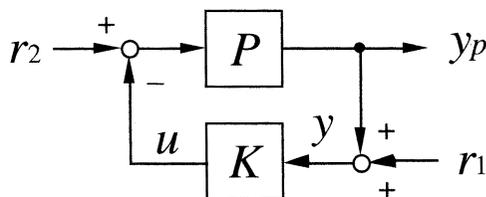


Fig. 1 Closed loop system

* 原稿受付 1995年10月30日

** 京都大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyoto University; Uji, Kyoto 611, JAPAN

Key Words: controller reduction, subspace method, experimental data, singular value decomposition, joint design of experiment and control

$$K: \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{y}[k], \\ \mathbf{u}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{y}[k], \\ \mathbf{x}[k] \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u}[k] \in \mathbf{R}^m, \mathbf{y}[k] \in \mathbf{R}^l \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times l}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times l} \end{cases} \quad (1)$$

で表せるものとし、これは可制御かつ可観測なシステムであるとする。また、補償器の状態 $\mathbf{x}[k]$ はすべて観測可能とする。このとき、本論文ではある特定の外部入力によってFig.1から定まる $\mathbf{y}[k]$ ($k=1,2,\dots,N$)に対して、 $\mathbf{u}[k]$ とほぼ同じ出力 $\mathbf{u}_r[k]$ を持つ $p(<n)$ 次元の補償器 K_r

$$K_r: \begin{cases} \mathbf{x}_r[k+1] = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r[k] + \mathbf{B}_r\mathbf{y}[k], \\ \mathbf{u}_r[k] = \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r[k] + \mathbf{D}\mathbf{y}[k], \\ \mathbf{x}_r[k] \in \mathbf{R}^p, \mathbf{u}_r[k] \in \mathbf{R}^m \\ \mathbf{A}_r \in \mathbf{R}^{p \times p}, \mathbf{B}_r \in \mathbf{R}^{p \times l}, \mathbf{C}_r \in \mathbf{R}^{m \times p} \end{cases} \quad (2)$$

を実験データに基づいて求めることを考える。

3. 低次元化法

3.1 設計方針

2.の低次元化補償器 K_r を求めるためにつきのような方針を考える。まず、(1)式のシステムに対しつき行列を定義する。

$$\mathbf{Y}^{(i)} := \begin{bmatrix} \mathbf{y}[i] & \mathbf{y}[i+1] & \dots & \mathbf{y}[N+i-1] \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{U}^{(i)} := \begin{bmatrix} \mathbf{u}[i] & \mathbf{u}[i+1] & \dots & \mathbf{u}[N+i-1] \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{X}^{(i)} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}[i] & \mathbf{x}[i+1] & \dots & \mathbf{x}[N+i-1] \end{bmatrix} \quad (5)$$

また同様に(2)式のシステムに対し、 $\mathbf{X}_r^{(i)}$ 、 $\mathbf{U}_r^{(i)}$ を定義する。これらはすべて時系列データを並べた行列である。このとき、(1)式より次式が成り立ち

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{B}\mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{D}\mathbf{Y}^{(1)} \end{cases} \quad (6)$$

さらに、ある同値変換 $\mathbf{T}(\in \mathbf{R}^{n \times n})$ により(6)式と次式は同値である。

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{X}}^{(2)} = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{X}}^{(1)} + \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(1)} = \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{X}}^{(1)} + \mathbf{D}\mathbf{Y}^{(1)} \end{cases} \quad (7)$$

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}^{(i)} \quad (8)$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} \quad (9)$$

また同様に、(2)式から次式が成り立つ。

$$\begin{cases} \mathbf{X}_r^{(2)} = \mathbf{A}_r\mathbf{X}_r^{(1)} + \mathbf{B}_r\mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{U}_r^{(1)} = \mathbf{C}_r\mathbf{X}_r^{(1)} + \mathbf{D}\mathbf{Y}^{(1)} \end{cases} \quad (10)$$

つきに、どのような条件が満たされれば(10)式が(7)式の良い近似となるのかについて考察する。まず、(1)式

の補償器に対して次式の記号を定義する。

$$\mathcal{U}^j := \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}[1] & \dots & \mathbf{u}[N] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}[j] & \dots & \mathbf{u}[N+j-1] \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathcal{Y}^j := \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}[1] & \dots & \mathbf{y}[N] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}[j] & \dots & \mathbf{y}[N+j-1] \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\Gamma^j := \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}} \\ \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}}^{j-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{H}^j := \begin{bmatrix} \mathbf{D} & & & 0 \\ \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{B}} & \mathbf{D} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}}^{j-2}\widehat{\mathbf{B}} & \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}}^{j-3}\widehat{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (14)$$

\mathcal{U}^j 、 \mathcal{Y}^j はブロックハンケル行列、 Γ^j は拡大可観測性行列、 \mathbf{H}^j はマルコフパラメータからなるブロックテプリッツ行列である。また同様に、(2)式の補償器に対して \mathcal{U}_r^j 、 \mathbf{H}_r^j 、 Γ_r^j を定義する。このとき、(7)、(10)式から、

$$\mathcal{U}^j - \mathbf{H}^j\mathcal{Y}^j = \Gamma^j\widehat{\mathbf{X}}^{(1)} \quad (15)$$

$$\mathcal{U}_r^j - \mathbf{H}_r^j\mathcal{Y}^j = \Gamma_r^j\mathbf{X}_r^{(1)} \quad (16)$$

が成り立つ。さて、ここで

$$\Gamma_r^j\mathbf{X}_r^{(1)} \simeq \Gamma^j\widehat{\mathbf{X}}^{(1)} \simeq \Gamma^j \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{X}}_1^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(1)} =: \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{X}}_1^{(1)} \\ \widehat{\mathbf{X}}_2^{(1)} \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{X}}_1^{(1)} \in \mathbf{R}^{p \times N} \quad (18)$$

が成り立つ場合を考える。このとき、(15)式と(16)式の第 k 列目に注目すると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}[k] - \mathbf{D}\mathbf{y}[k] \\ \mathbf{u}[k+1] - \mathbf{D}\mathbf{y}[k+1] - \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}[k] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[k+j-1] - \mathbf{D}\mathbf{y}[k+j-1] \\ \quad - \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}[k+j-2] - \dots - \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}}^{j-2}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}[k] \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r[k] - \mathbf{D}\mathbf{y}[k] \\ \mathbf{u}_r[k+1] - \mathbf{D}\mathbf{y}[k+1] - \mathbf{C}_r\mathbf{B}_r\mathbf{y}[k] \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r[k+j-1] - \mathbf{D}\mathbf{y}[k+j-1] \\ \quad - \mathbf{C}_r\mathbf{B}_r\mathbf{y}[k+j-2] - \dots - \mathbf{C}_r\mathbf{A}_r^{j-2}\mathbf{B}_r\mathbf{y}[k] \end{bmatrix}$$

(19) 列を考えることにする。

となる。(15), (16)式は時系列行列で構成されていることを考慮すると,

$$\begin{cases} \mathbf{u}[k] & \simeq \mathbf{u}_r[k] \\ \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}[k] & \simeq \mathbf{C}_r\mathbf{B}_r\mathbf{y}[k] \\ & \vdots \\ \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}}^{j-1}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}[k] & \simeq \mathbf{C}_r\mathbf{A}_r^{j-1}\mathbf{B}_r\mathbf{y}[k] \end{cases} \quad (20)$$

($k=1, 2, \dots, N$)

が成り立つ。ここで, $\mathbf{u}[k]$, $\mathbf{u}_r[k]$ ($k=1, 2, \dots, N$) は

$$\mathbf{u}[k] = \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}}^{k-1}\widehat{\mathbf{x}}[1] + \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{A}}^{k-2}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}[1] + \dots + \mathbf{D}\mathbf{y}[k]$$

($\widehat{\mathbf{x}}[k] := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}[k]$) (21)

$$\mathbf{u}_r[k] = \mathbf{C}_r\mathbf{A}_r^{k-1}\mathbf{x}_r[1] + \mathbf{C}_r\mathbf{A}_r^{k-2}\mathbf{B}_r\mathbf{y}[1] + \dots + \mathbf{D}\mathbf{y}[k] \quad (22)$$

と書けるので, (20)式から j が十分大きい場合には(10)式は(7)式の良い近似となり, (2)式は(1)式の低次元化システムとなることが期待できる。

これらのことをまとめると, (17)式を満たす変換行列 \mathbf{T} が存在すれば, (1)式は

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_1[k+1] \\ \widehat{\mathbf{x}}_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_{11} & \widehat{\mathbf{A}}_{12} \\ \widehat{\mathbf{A}}_{21} & \widehat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_1[k] \\ \widehat{\mathbf{x}}_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{B}}_1 \\ \widehat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}[k] \\ \mathbf{u}[k] = [\widehat{\mathbf{C}}_1 | \widehat{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_1[k] \\ \widehat{\mathbf{x}}_2[k] \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{y}[k] \end{cases} \quad (23)$$

$$\widehat{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_{11} & \widehat{\mathbf{A}}_{12} \\ \widehat{\mathbf{A}}_{21} & \widehat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{B}} := \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{B}}_1 \\ \widehat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\widehat{\mathbf{C}} := [\widehat{\mathbf{C}}_1 | \widehat{\mathbf{C}}_2] \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_1[k] \\ \widehat{\mathbf{x}}_2[k] \end{bmatrix} =: \mathbf{T}\mathbf{x}[k], \widehat{\mathbf{x}}_1[k] \in \mathbf{R}^p \quad (26)$$

と同値となり, さらに(17)式から $\widehat{\mathbf{x}}_2[k]$ は出力に対し影響の小さい状態変数と考えられるので, これを無視し

$$\mathbf{A}_r = \widehat{\mathbf{A}}_{11}, \mathbf{B}_r = \widehat{\mathbf{B}}_1, \mathbf{C}_r = \widehat{\mathbf{C}}_1 \quad (27)$$

とすることで低次元化補償器 K_r が得られる。

さてつぎに, (17)式の近似について考える。 Γ^j は定義から $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{A}}$ によって定まる行列であり, $\Gamma^j\widehat{\mathbf{X}}^{(1)}$ の各行ベクトルの大きさには一般に大きくなればつきがある場合も考えられる。そのため, 適当な重み行列 \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 を考え,

$$\mathbf{L}_1\Gamma^j\mathbf{X}_r^{(1)}\mathbf{L}_2 \simeq \mathbf{L}_1\Gamma^j\widehat{\mathbf{X}}^{(1)}\mathbf{L}_2 \quad (28)$$

とすることが必要であると思われる。そこで本論文では, \mathbf{L}_1 として $\mathbf{L}_1\Gamma^j\widehat{\mathbf{X}}^{(1)}$ の各行ベクトルのフロベニウスノルムが1に規格化されるような重み行列を, \mathbf{L}_2 には単位行

3.2 設計法

つぎに設計手順を示す。まず, 実験データから(5)式のような $\mathbf{X}^{(1)}$ を求める。ここで $\mathbf{X}^{(1)} \in \mathbf{R}^{n \times N}$ であり,

$$\text{rank}\mathbf{X}^{(1)} = n \quad (29)$$

を仮定する。また, N は実験データの個数である。

Step 1 \mathbf{A} , \mathbf{C} , $\mathbf{X}^{(1)}$ より十分大きな j を用いて次式の Ξ を求める。

$$\Xi := \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \in \mathbf{R}^{jm \times N} \quad (30)$$

Step 2 上式の Ξ に対し,

$$\Xi_L := \mathbf{L}\Xi \quad (31)$$

として正規化された Ξ_L を求める。このとき \mathbf{L} は

$$\mathbf{L} = \text{diag}\left\{ \|\xi_1\|^{-1} \dots \|\xi_{jm}\|^{-1} \right\} \quad (32)$$

で与えられる。ただし, ξ_i は Ξ の第 i 行ベクトルを, $\|\cdot\|$ はフロベニウスノルムを表す。

Step 3 Ξ_L を次式のように特異値分解する。

$$\begin{aligned} \Xi_L &= [\mathbf{E} | *] \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^T \\ * \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{jm \times n}, \mathbf{V}^T \in \mathbf{R}^{n \times N}$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}\{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n\}$$

この式において

$$\begin{aligned} \Xi_L &= \mathbf{L}\Gamma^j\widehat{\mathbf{X}}^{(1)}, \Gamma^j := \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{S}, \\ \widehat{\mathbf{X}}^{(1)} &:= \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (34)$$

とする。これは

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{T}\widehat{\mathbf{X}}^{(1)}, \mathbf{T} := \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{V} \quad (35)$$

となる同値変換 \mathbf{T} を用いて(6)式を(7)式に変換したことに相当する。ここで

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \gg \sigma_{p+1} \geq \dots \geq \sigma_n \quad (36)$$

を仮定し,

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{X}}_1^{(1)} \\ \widehat{\mathbf{X}}_2^{(1)} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{V}^T \quad (37)$$

$$\widehat{\mathbf{X}}_1^{(1)} \in \mathbf{R}^{p \times N} \quad (38)$$

とすると、(33)式が

$$\begin{aligned}
 ESV^T &= E \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \\
 &\simeq E \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)
 \end{aligned}$$

と近似できると同様に(34)式は

$$\Xi_L \simeq L\Gamma^j \begin{bmatrix} \hat{X}_1^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

となるので、(35)式の T は(17)式の近似が可能となる同値変換と考えられる。

Step 4 (35)式の T と(9)、(24)~(26)式より低次元化補償器 K_r は(27)式によって得られる。

3.3 考察

3.3.1 従来法との関係

従来の低次元化法は、システムの入出力関係がほぼ等しくなるようにするものを中心であるが、本設計法ではある特定の入力のみを考え、これに対する出力がほぼ等しくなるように低次元化を行っている。そのため、ある決まった外部入力による閉ループ系での補償器低次元化に有効な方法である。また、低次元化の際には制御対象 P の構造の情報を用いていない。そのため、制御対象のモデル化誤差に対してロバスタな低次元化法となることが期待できる。さらに、従来の低次元化法は不安定なシステムへの適用が困難であったため、既約分解を用いるなどの方法がとられているが、本手法はシステムの安定性には依存しない方法となる。ただし、実験結果に基づいた方法であるため外乱が存在する場合、あるいは外部入力異なる場合などに、得られる補償器の特性が変化することは十分予想されることである。しかし、この影響がどの程度の大きさを持つのかに関する考察を行うことは現段階では極めて困難であり、今後検証すべき課題と考えられる。

また、一般に低次元化問題では補償器のある特性(例えば積分特性)を保存したい場合がある。その際には本手法でも従来法同様に、補償器を

$$\begin{aligned}
 K &= \bar{K}_s \cdot K_s \quad \text{あるいは} \quad K = \bar{K}_s + K_s \quad (41) \\
 K_s &: \text{保存したい特性を含む部分}
 \end{aligned}$$

に分けた後に K_s のみに低次元化を施すことで K_r を求めることが可能であるが、もし、補償器の状態のうちどの成分が保存したい特性に相当するのかわかることができれば、(28)式の L_2 によって重みを付けることで可能になると思われる。

3.3.2 システム同定との関係

本手法では、(17)式のように $\Gamma^j \hat{X}^{(1)}$ に基づいて低次元化を行っているがこの意味について考察する。本論文では(31)式の Ξ_L を(33)式のように特異値分解を行いこれを(40)式で近似しているが、これは $\hat{X}^{(1)} := V^T$ で張られる空間を $\hat{X}^{(1)}$ の部分空間に射影していることに相当する。また、ここでは(36)式を仮定していることからもっとも大きな p 個の成分への射影となる。部分空間法を用いた同定法(たとえば4SID法^{7),8)}では、(15)式に基づき $\Gamma^j \hat{X}$ の推定値を求め、このランクがシステムの次数と等しくなることにより同定モデルの次数を定めるが、本低次元化法でもこれと同様に補償器の次数を定めている。

3.3.3 j および p の決定法

(30)式の j に関しては4SID法などの同定法と同様に大きくとればシステムをより正確に評価しており、望ましい結果が得られることが期待される。しかし、 j が大きければそれだけ大きな行列の特異値分解が必要となることから、 j は計算機に依存した値となる。ただし、 $\text{rank} \Xi_L = n$ が成り立たなくてはならないため、 j は最低 n 以上の値をとらなければならない。

また、本論文では低次元化補償器の次数 p が与えられている状況から出発しているが、実際には(36)式の仮定から Ξ_L の特異値が大幅に小さくなる場所をもって p を定めることが適当と考えられる。

4. 数値例

つぎに、数値例による従来法との比較により本設計法の有効性を検証し、また得られる補償器の構造について考察を加える。ただし、ノイズ、モデル化誤差の影響は考えないものとする。

4.1 制御対象の記述

4.ではFig.2のような倒立振り子システムをもちいる。このシステムはモータの出力するトルクによって振り子・アームの回転角度 θ 、 ϕ を制御するシステムであり、1入力

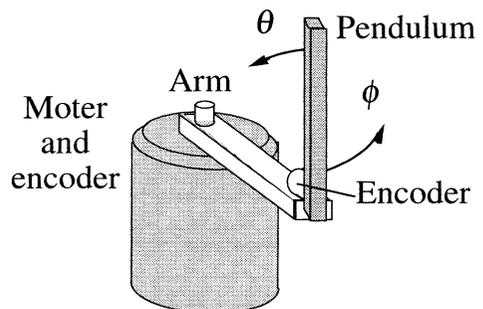


Fig. 2 Inverted pendulum system

2 出力のシステムである。参考として、アームの長さは 0.52[m]、振子の長さは 0.48[m]、質量は 0.135[kg] である。また、連続時間系での伝達関数は

$$P = \left[\frac{-2.50s^2}{\frac{s(s+1.94)(s+5.69)(s-5.59)}{1.54(s+5.50)(s-5.50)}} \right] \quad (42)$$

である。これにより補償器 K は 2 入力 1 出力のシステムとなる。なお、この装置のモデルの導出・パラメータの値は参考文献 9) に詳しい。本論文ではこのシステムに対し次の条件でシミュレーションを行う。

- 外部入力：アームへのステップ目標値 (=10°)
- サンプルングタイム：3[ms]
- 実験時間：3[s]
- データ数：1000[個]

4.2 低次元化

上述のシステムに対し、McFarlane らによって提案されている、ループ整形法に基づく H^∞ 制御則¹¹⁾ によって補償器を設計した。このとき、補償器は適当な周波数重みを用いることにより、12 次のものが得られた。このときの補償器の極・零点を次式に示す。

$$K(s) = [K_1(s) K_2(s)] \quad (43)$$

極： 0, 1.69, -0.30, -3.0, -9.08, -60.0, -61.3, -100, -300, -329, -119+122.9j, -119-122.9j

$$K_1 \text{ の零点： } 0, -325, -118+114j, -118-114j$$

$$K_2 \text{ の零点： } -0.30, -0.31, -1.14, -10.0, -54.0, -60.0, -84.0, -100, -300, -300$$

一つの積分器を持ちしかも不安定な補償器となった。この補償器 K をサンプルングタイムによって離散化したシステムに対し、本設計法を適用して 3~7 次の低次元化補償器 $K_{r_i}^{pr}$ ($i=3,4,\dots,7$) を求めた。ただし、(30) 式の j は 30 とした。このとき、4~7 次の低次元化補償器によって P を安定化することが可能であった。つぎに、従来法により同様に 3~7 次の補償器 $K_{r_i}^{BT}$ ($i=3,4,\dots,7$) を求めた。ただし、従来法としては参考文献 6) に基づき、正規化既約分解を用いた BT 法を用いた。このとき、5~7 次までの低次元化補償器によって P を安定化することが可能であった。このときの、 K , $K_{r_4}^{pr}$, $K_{r_5}^{pr}$ を用いたときの応答を Fig.3 に示す。従来法による補償器は 5 次の補償器であるのに対し、提案手法では 4 次であるにもかかわらず元の補償器とはほぼ同じ応答を示している。

4.3 考察

まず、補償器の構造について考察する。本手法は離散時間領域での補償器の低次元化手法であるが、ここでは、連続時間領域での物理システムを考え、これに基づいて

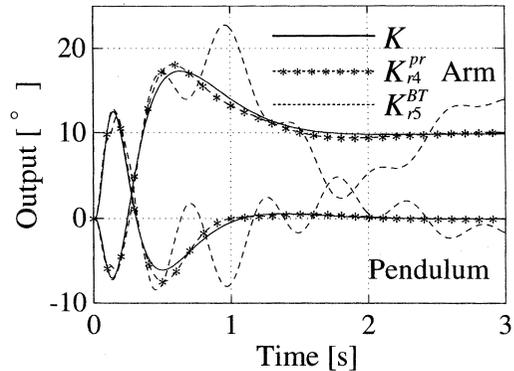


Fig. 3 Step responses (simulation)

はじめの補償器を設計しているので、得られた低次元化補償器を連続時間システムに変換してその特性を評価する。本設計法では低次元化に対する評価関数が存在しないが、ある特定の y に対して $u \simeq u_r$ となる出力を持つ低次元化補償器を求めていることから、

$$\Phi_{u-u_r} = |K(j\omega) - K_r(j\omega)| \Phi_y \quad (44)$$

の特性を評価する。ここで、 Φ_{u-u_r} , Φ_y はそれぞれ $u - u_r$, y のパワースペクトルを、 $|K(j\omega) - K_r(j\omega)|$ は $K - K_r$ の連続時間周波数領域でのゲインを表す。また、ここでは外部入力としてアームに対するステップ目標値を考えていることから

$$\Phi_y = \left| [I + P(j\omega)K(j\omega)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ j\omega \end{bmatrix} \right| \quad (45)$$

となる。4 次と 5 次の補償器 $K_{r_4}^{pr}$, $K_{r_5}^{pr}$, $K_{r_4}^{BT}$, $K_{r_5}^{BT}$ を用いたときの $\Phi_{u-u_{r_4}}^{pr}$, $\Phi_{u-u_{r_5}}^{pr}$, $\Phi_{u-u_{r_4}}^{BT}$, $\Phi_{u-u_{r_5}}^{BT}$ の特性を Fig.4 に示す。BT 法に比べ提案手法はシミュレーションが有効となる帯域 (2.09~1047[rad/s]) で Φ_{u-u_r} が小さくなり、 K と K_r の差が小さくなっている様子が理解できる。

つぎに、詳細は略すがいくつかのシミュレーション結果より得られた知見について述べる。低次元化補償器の次数をある程度大きくすると従来法と提案手法においては同様の閉ループ特性を示す補償器が得られる。しかし、参照入力 (目標値) をある特定の形に定め、より低次元化を行うと顕著な差が現れる。また、提案手法によって得られた補償器に対して異なった参照入力を用いたシミュレーションをいくつか行ったが、閉ループ系の応答にあまり劣化は見られなかった。これは提案手法が閉ループ特性を反映した低次元化手法であることが一つの理由として考えられるが、これについては今後詳細に検証すべき内容

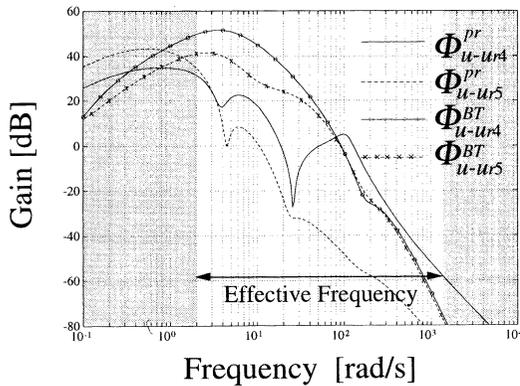


Fig. 4 Gain plots of Φ_{u-u_r} .

と思われる。

5. 実験

つぎに実験によって本設計法の有効性を検証する。制御対象は4.と同等のものを用い、実験条件も同様のものでした。ただし、モデル化誤差やノイズの影響が予想される。提案法とBT法の両方を用いて低次元化補償器を求めたところ、BT法では5次以上の補償器で安定化が可能であったのに対し、提案法では4次以上の補償器で安定化が可能であった。このときの K , K_{r4}^{pr} , K_{r5}^{BT} を用いたときの応答を Fig.5に示す。モデル化誤差やこの実験レベルのノイズが存在する場合においても本設計法の有効性が理解できる。

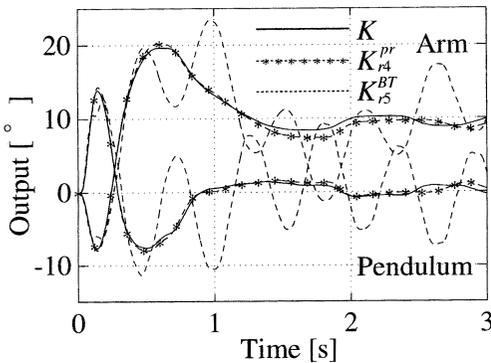


Fig. 5 Step responses (experiment)

6. おわりに

本論文では、従来とは異なった観点から、部分空間法による同定の概念より実験データを用いた低次元化法を提

案し、その有効性を従来法との比較を含めた実験によって検証した。とくに、提案手法では従来法に比べ補償器の次数も小さくなり、応答の劣化も小さいような補償器が得られた。なお、ここでは省略したが、提案法の有効性は補償器が非最小位相システムなど様々な場合においてシミュレーションで確認している。

参考文献

- 1) B. C. Moore: Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability and model reduction; *IEEE Trans.*, Vol. AC-37, No. 1, pp. 17-32 (1981)
- 2) K. Glover: All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds; *Int. J. Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193 (1984)
- 3) D. F. Enns: Model reduction with balanced realization : An error bound and a frequency weighted generalization; *Proc. of 23rd CDC*, pp. 127-132 (1984)
- 4) K. Zhou: Weighted optimal Hankel norm model reduction; *Proc. of 32nd CDC*, pp. 3353-3354 (1993)
- 5) Y. Liu and B. D. O. Anderson: Controller reduction via stable factorization and balancing; *Int. J. Contr.*, Vol. 44, No. 2, pp. 507-531 (1986)
- 6) D. G. Mayer: A fractional approach to model reduction; *Proc. of ACC*, pp. 1041-1047 (1988)
- 7) M. Moonen and B. De Moor: On- and off-line identification of linear state-space models; *Int. J. Contr.*, Vol. 49, No. 1, pp. 219-232 (1989)
- 8) P. V. Overschee and B. De Moor: N4SID : Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic system; *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93 (1994)
- 9) M. Verhaegen and P. Dewilde: Subspace model identification part 2. Analysis of the elementary output - error state - space model identification; *Int. J. Contr.*, Vol. 56, No. 5, pp. 1211-1241 (1992)
- 10) 杉江, 岡田: 並列倒立振り子システムの H_∞ 制御; システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 12, pp. 543-551 (1993)
- 11) D. C. McFarlane and K. Glover: *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description*, Lecture Notes in Control and Information Science, No. 138, Springer-Verlag (1990)