

# 状態空間のエネルギー距離に基づく力学系のアトラクタ設計法

岡田昌史 (東京工業大学)

## Attractor Design of Dynamics based on Energy Distance in State Space

\*Masafumi OKADA (Tokyo Institute of Technology)

**Abstract**— Robot motions are generated based on a stabilizing controllers and reference motion patterns. On the other hand, human motion is determined through the interaction between the body and its environment. Motion patterns are not prepared a priori but generated as the results of the entrainment phenomena of the dynamics. So far, we have developed a controller design method that entrains a dynamics to the specific closed curved line. However, the obtained attractor is sometimes different from a desired one. That is fatal for a robot motion with a drastic change of the body dynamics through the motion. In this paper, we develop a new attractor design method based on the energy distance in the state space.

**Key Words:** Attractor design, Dynamics-based information processing, Hamiltonian, Motion emergence

### 1. はじめに

ロボットの運動生成において、一般にはその安定化コントローラと目標運動パターンが用いられる。安定化コントローラはロボットの身体の力学系に基づいて設計され、目標運動パターンは環境に基づいて設計される。これにより、ロボットが動作する環境は固定され変わりゆく環境の中での動作の変化はコントローラのロバスト性にゆだねられる。しかし、コントローラのロバスト性の限界は大きくなく実世界の中での動作生成は限定されたものに留まるのが現状である。これに対し、人間の運動は身体の力学系と環境の相互作用の中から生まれているといった考えに基づいて、筆者らはこれまでに力学系がアトラクタを有するようにコントローラを設計することでロボットの運動創発システムを設計してきた [1]。ここでは、力学的情報処理 [2] を基礎として、ロボットの身体・環境を含めた力学系を平衡軌道へと安定化するコントローラを設計するものであり、コントローラとロボット身体が閉ループ系を構成することで、力学系の引き込み作用によって運動が生成されるというものである。これは身体性の概念 [3] とも一致しており、ロボットの知能を設計する上で大きな役割を果たすものと考えられる。

文献 [1] ではヒューマノイドロボットを対象としてこれがスクワット運動を行うアトラクタ設計を行った。この方法では入力最小化の最小二乗問題によってコントローラが設計されていたが、軌道と入力の因果関係に矛盾が生じていることから、希望の軌道と得られた軌道が大きくずれる傾向があった。これは運動途中でロボットの力学系が大きく変化する場合に致命的になる。そこで、本研究では上記問題の原因を明らかにし、新たな方法を提案することで、希望の軌道をアトラクタとする力学系の設計法を示す。

### 2. 力学系のアトラクタ設計法

#### 2.1 入力最小化によるアトラクタの設計法

本章では文献 [1] にある力学系のアトラクタ設計法について述べる。簡単のため力学系は以下の可制御な線形離散時間差分方程式で表されるものとする。

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (1)$$

ただし、 $x[k] \in \mathbf{R}^n$  は状態変数、 $u[k] \in \mathbf{R}^m$  は入力である。アトラクタ設計は入力  $u[k]$  を

$$u[k] = f(x[k]) \quad (2)$$

で表されるように  $x[k]$  の関数としたとき、閉ループ系

$$x[k+1] = Ax[k] + Bf(x[k]) \quad (3)$$

が所望の軌道  $\Xi$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_N \end{bmatrix} \quad (4)$$

をアトラクタとするよう  $f(x[k])$  を設計する問題である。具体的には  $f(x[k])$  を  $x[k]$  の  $\ell$  次多項式で表現する。 $f(x[k])$  を設計するためには  $x[k]$  が  $\Xi$  に引き込まれるようなベクトル場を定義し、これより得られる  $u[k]$  と  $x[k]$  の複数の組から関数近似を行う。

式 (1) のパラメータ  $A, B$  は既知で、 $\Xi$  が与えられているとする。また、 $\Xi$  を実現する入力の列  $u[k]$  が存在するとする。このとき、 $x$  の空間内にある点  $x_i$  を定義し、これにもっとも近い点  $\xi_i$  を求める。 $x_i$  が  $j$  ステップ先で  $\xi_{i+j}$  に一致するような入力の列  $u_k$  ( $k = i, \dots, i+j-1$ ) を求めよう。 $x_i$  の  $j$  ステップ先  $x_{i+j}$  は

$$x_{i+j} = A^j x_i + \Gamma U \quad (5)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{j-1}B \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_i^T & u_{i+1}^T & \cdots & u_{i+j-1}^T \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

で表される。このとき、 $\Gamma$  は拡大可制御性行列なので  $j \geq n$  のとき  $\Gamma$  は列フルランクであり、 $x_{i+j}$  を  $\xi_{i+j}$  に一致させる  $U$  が存在する。これは、

$$U = \Gamma^\# (\xi_{i+j} - A^j x_i) \quad (8)$$

で得られる。また、得られた  $U$  を用いて  $x_k$  ( $k = i, \dots, i+j-1$ ) を計算することで、 $x$  と  $u$  の組  $(x_k,$

$u_k$  が得られる． $x$  の空間内に複数の初期値  $x_i$  を定義し，多くの  $x$  と  $u$  の組を求めこれを用いて関数近似を行うことで式 (2) の  $f(x[k])$  が得られる．

## 2.2 設計法に関する改善すべき点

$x_i$  は  $x_{i+j}$  で  $\xi_{i+j}$  に一致することが保証されるがその経路に関する制約は設けられていない．また，式 (8) の最小二乗解は入力  $U$  の最小化 (|| $U$ || の最小化) を意味している．これより， $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j-1}$  は後から決まる経路であり  $\Xi$  に沿った経路となることは保証されない．このため，はじめに与えた  $\Xi$  のステップ毎の変化率が小さい場合に，この設計法は有効であるが，変化率が大きい場合にはショートカットをするなどの現象が起こりやすくなる．これを数値例を挙げて示す．いま，Fig.1 に示す倒立振り子システムを考える．振り子の回転角度を  $\theta$ ，カートの動きを  $y$ ，カートへ加える力を入力  $u$  とし，状態変数  $x$  を

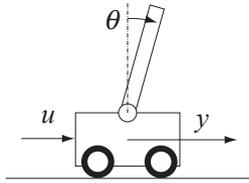


Fig.1 Inverted pendulum system

$$x = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & y & \dot{y} \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

として運動方程式を求め，これをサンプリングタイム  $T$  で離散化することで，式 (1) の形式の力学系が得られる．この系に対し適当な  $\Xi$  を与え，前述の設計法を適用してアトラクタ設計を行った．Fig.2 は設計途中に得られた  $\Xi$  と  $x_k$  ( $k = i, \dots, i + 30$ ) の一つの例を表す．ただし， $x$  は 4 次元ベクトルであるが，ここでは

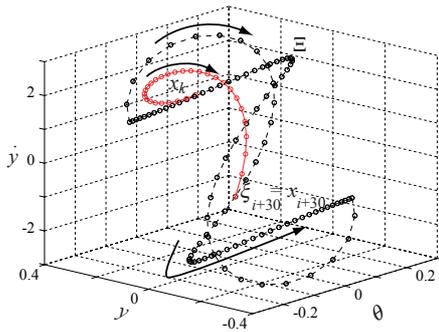


Fig.2 Trajectory of obtained  $x$  via conventional method

$\theta, y, \dot{y}$  軸を用いた 3 次元空間を表現した．図のように得られた  $x_i, x_{i+1}, \dots$  は経路に沿わないものとなっている．また，得られた  $x_k$  から求めた  $\|\xi_k - x_k\|$  の値を Fig.3 に示す．この図から， $\|\xi_k - x_k\|$  は変動しており， $x_k$  は  $\xi_k$  に沿っていないことがわかる．得られた  $x$  と  $u$  の組から  $f(x[k])$  を 6 次の多項式として関数近似した．設計されたコントローラを用いて二つの初期値 (\* で表現) から出発した力学系の動きを Fig.4 に示

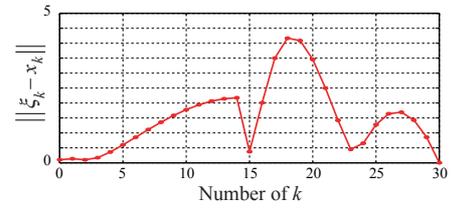


Fig.3 Norm of  $\|\xi_k - x_k\|$  via conventional method

す．アトラクタが設計されたものの，はじめに与えた軌道  $\Xi$  とは大きく離れている．ここでの例は線形系を

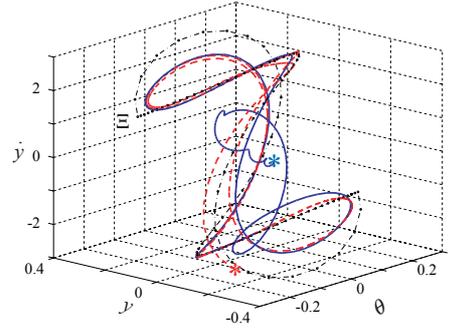


Fig.4 Trajectory of the dynamics

取り挙げたため， $\Xi$  とアトラクタとなった軌道が離れていることは安定性の面では大きな問題ではない．しかし，系が非線形な場合，各  $\xi_k$  まわりにおける線形近似  $A_k, B_k$  を用いてコントローラを設計する．このとき， $x_k$  は  $\xi_k$  に沿って動くものと仮定して  $\Gamma$  を求めるため，実際に得られた  $x_k$  が  $\xi_k$  に沿わないことで運動の実現性・安定性に大きな問題が生じる．これは歩行運動のように運動の途中で系のダイナミクスが大きく変化する場合に致命的となる．次章ではこれらの問題を解決するアトラクタ設計法を提案する．

## 3. 軌道を考慮したアトラクタ設計法

### 3.1 距離の最小二乗によるアトラクタ設計

本章では  $x_k$  が  $\xi_k$  に沿うよう， $x_k$  と  $\xi_k$  の距離の二乗和を評価関数とした設計法を提案する．式 (1) の力学系から，以下の方程式が得られる．

$$X_{k+1} = Ax[k] + BU \quad (10)$$

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} x[k+1] \\ x[k+2] \\ \vdots \\ x[k+j] \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{j-1}B & A^{j-2}B & \cdots & B \end{bmatrix} \quad (12)$$

この関係を用いて，

$$U = B^\# (\Xi_{k+1} - Ax_i) \quad (13)$$

$$\Xi_{k+1} = \begin{bmatrix} \xi_{i+1}^T & \xi_{i+2}^T & \cdots & \xi_{i+j}^T \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

として  $U$  を求める．これは

$$J = \sum_{\kappa=1}^j \|\xi_{i+\kappa} - x_{i+\kappa}\| \quad (15)$$

の最小化となり， $x_k$  と  $\xi_k$  の距離の二乗和を評価したものである．この方法を用いて倒立振り子システムに対してアトラクタ設計を行った．Fig.5 は Fig.2 と同様に  $\Xi$  とある  $x_i$  に対して得られた  $x_k$ ， ( $k = i, \dots, i+30$ ) を表したものである．Fig.2 に比べて， $x_k$  が  $\xi_k$  に沿ったも

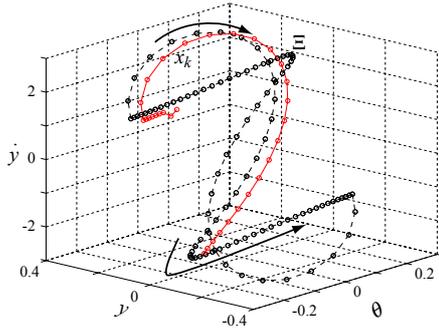


Fig.5 Trajectory of obtained  $x$  via the least square method

のとして得られている．また，このときの  $\|\xi_k - x_k\|$  の値を Fig.6 に示す． $k$  が大きくなるにつれて  $x_k$  が  $\xi_k$  に

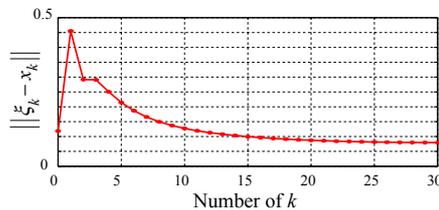


Fig.6 Norm of  $\|\xi_k - x_k\|$  via the least square method

近づく様子が理解できる．さらに，得られたコントローラを用いたときの力学系の動きを Fig.7 に示す．Fig.4 に比べ， $\Xi$  に沿った軌道が得られている．なお， $f(x[k])$  は前章同様  $x[k]$  の 6 次多項式として近似した．

### 3.2 エネルギー距離に基づくアトラクタ設計

前節の手法において特記すべきことは，Fig.7 の結果において力学系がアトラクタに収束していないことが挙げられる．すなわち， $x[k]$  は毎回ずれた軌道を通っており，Fig.7 において力学系の軌道が太い線として見える．これは Fig.6 において  $\|\xi_k - x_k\|$  の収束が遅いことに原因がある．以下ではこれについて考察する．

ある安定な力学系の状態変数  $x[k]$  が 0 に収束するとき，その収束度合いは  $x[k]$  のユークリッド距離  $\|x[k]\|$  からでは判断できない．例えば Fig.8 に表される図で概念を示す．左図は初期値  $x[0]$  から出発した力学系の軌跡を示している． $j < i$  が成り立つが  $\|x[j]\| > \|x[i]\|$

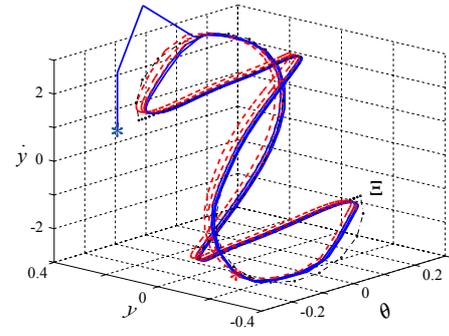


Fig.7 Trajectory of the dynamics via the least square method

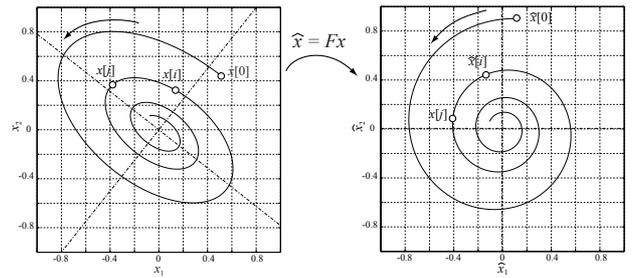


Fig.8 Convergence of dynamics

である．これがもし座標変換行列  $F$  により  $\hat{x}$  空間に変換され， $\|\hat{x}[k+1]\| < \|\hat{x}[k]\|$  が常に成り立つならば， $\hat{x}$  のユークリッド距離が収束の距離と一致する．以下では，座標変換行列  $F$  の求め方について述べる．

いま，以下の式で表される線形の保存系を考える．

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n \quad (16)$$

ただし， $A$  は対角化可能であるとする．このとき，初期値  $x_0$  から出発した状態変数  $x$  は原点を中心とする  $n$  次元空間の楕円体の殻上を動く．この楕円体を球体に変換する  $F$  を求める． $A$  の固有値分解を

$$A = T\Lambda T^{-1} \quad (17)$$

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \right\} \quad (18)$$

とする．保存系であることから  $\text{Re}(\lambda(A)) = 0$  である．ここで，

$$\tilde{x} = T^{-1}x \quad (19)$$

となる座標変換を考えると  $\tilde{x}(t)$  は初期値  $\tilde{x}_0$  を用いて

$$\tilde{x}(t) = \exp(\Lambda t)\tilde{x}_0 = \text{diag} \left\{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \right\} \tilde{x}_0 \quad (20)$$

で与えられる．さて，このとき

$$\tilde{x}^*(t)\tilde{x}(t) = x^T(t) (T^{-1})^* T^{-1}x(t) \quad (21)$$

$$= \tilde{x}_0^* \text{diag} \left\{ e^{(\lambda_1^* + \lambda_1)t}, \dots, e^{(\lambda_n^* + \lambda_n)t} \right\} \tilde{x}_0 \quad (22)$$

$$= \tilde{x}_0^* \tilde{x}_0 = \text{Const.} \quad (23)$$

が成り立つ．これは  $\tilde{x}(t)$  に関する球体の方程式であり  $x(t)$  が楕円球の殻上を移動することを意味している．こ

れより,

$$(T^{-1})^* T^{-1} = USU^T \quad (24)$$

と特異値分解し,

$$\hat{x} = Fx \quad (25)$$

$$F = S^{\frac{1}{2}} U^T \quad (26)$$

となる座標変換によって  $\hat{x}$  は球殻上を動く実変数となる．ここで，式 (23) はハミルトニアン (保存量) を表し，系のエネルギーに相当する．式 (16) が散逸系の場合でも式 (25) によって  $\|\hat{x}(t)\|$  が系のエネルギーを表すので， $\hat{x}(t)$  のユークリッド距離は  $x(t)$  をエネルギーで評価した距離を表していると言える．

これにより得られた  $F$  を用いて，アトラクタ設計法に関して以下の点を修正する．

1.  $x_i$  から  $\xi_i$  を見つける際に， $\|F(\xi_i - x_i)\|$  を最小化する  $\xi_i$  を求める．
2. 式 (10) の  $j$  を決める際，ある  $\Delta$  を定め， $\|F(\xi_{i+j} - x_{i+j})\| < \Delta$  を満たす  $j$  を決定する．これは適当な  $\delta$ ， $(0 < \delta < 1)$  を定め，

$$\delta^j \|F(\xi_i - x_i)\| < \Delta \quad (27)$$

の関係式から

$$j = \frac{\log \Delta - \log(\|F(\xi_i - x_i)\|)}{\log \delta} \quad (28)$$

によって求められる．なお， $\delta$  は収束の速度を意味している．

3. 式 (15) の評価関数を

$$J = \sum_{k=1}^j \delta^{-k} \|F(\xi_{i+k} - x_{i+k})\| \quad (29)$$

とした重み付き最小二乗にすることで，エネルギー距離を評価した最小二乗問題にする．

この設計アルゴリズムを用いて  $x_k$ ， $(k = i, \dots, i + 24)$  を求めたときの例を Fig.9 に，またそのときの

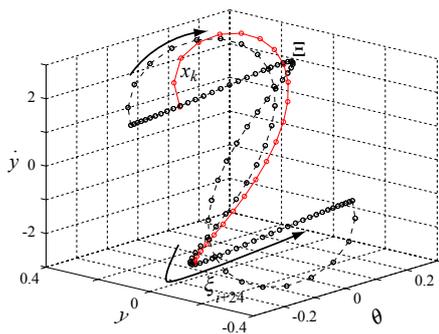


Fig.9 Trajectory of obtained  $x$  via energy distance method

$\|F(\xi_k - x_k)\|$  の値を Fig.10 に示す． $k$  が大きくなるにつれてエネルギー距離の意味で  $x_k$  が  $\xi_k$  へと収束している．また，得られたコントローラを用いたときの力学系の動きを Fig.11 に示す．Fig.7に比べ， $x[k]$  が  $\Xi$  へと収束しており，一つの軌道へと安定化している．

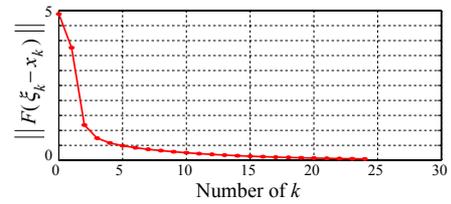


Fig.10 Norm of  $\|F(\xi_k - x_k)\|$  via energy distance method

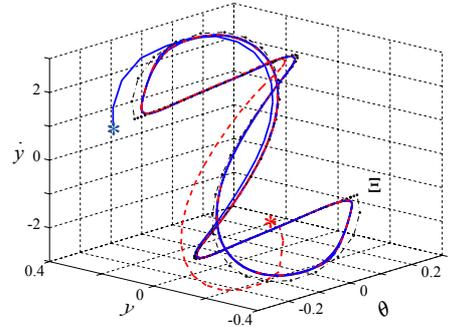


Fig.11 Trajectory of the dynamics via energy distance method

#### 4. おわりに

本研究では，力学系のアトラクタ設計法に関して線形制御理論の観点から新たな手法を提案した．

1. これまでの方法が入力最小化であったのに対し，この方法の問題点 (具体的には経路と入力との因果関係) を明らかにした．
2. 上記を解消するために，複数ステップ先の状態と経路の距離を最小化する方法を提案した．
3. さらに，状態空間に対してエネルギー距離を定義し，これを最小化する方法を提案することで，はじめに与えた軌道に沿ったアトラクタが形成されることを確認した．

今後，得られたコントローラを力学系の安定化要素と軌道生成要素に分離し，これに基づいた運動の記号の創発を行う予定である．

謝辞

本研究は文部科学省科学研究補助金 (特定領域研究 A03) 「学的情報処理による記号空間と運動空間の結合設計」(研究代表者:岡田昌史) の支援を受けた．

参考文献

- [1] 岡田, 大里, 中村: 非線形力学系のアトラクタ設計によるヒューマノイドロボットの運動創発, 計測自動制御学会論文誌, Vol.41, No.6, 2005, 掲載予定
- [2] 岡田, 中村: 脳型情報処理を行う力学系の多項式設計法とそのヒューマノイドの全身運動生成への応用, 日本ロボット学会誌, Vol.22, No.8, pp.1050-1060, 2004
- [3] R.Pfeifer and C.Scheier: Understanding Intelligence, Bradford Books, 2001.